数理解析研究所講究録
320巻 1978年 151-161

W^*-Dirichlet algebra と Flow

都留文科大　田中 純一
早大 教育　和田 淳蔵

§1. 序.

Forelli [1] によって導入された flow による解析性は、Forelli 自身および Muhly 等によってかなり詳しく調べられてきた。他方 群上の不変部分空間の理論は flow による解析性を主要な道具として用いながらエルゴード理論の枠組で再構成されつつある([3],[5])。ここでは69年に Forelli によって提出された解析測度の全変動に関する問題を取りあげ、関数環的側面からの考察を与えてみたい。加えていくつかの最近の結果を紹介する。

Xを compact Hausdorff 空間、(X, R) をX上の flow, 即ち $t \in R$ に対し T_t は X から X への位相同型で $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ および $(t, x) \mapsto T_t x$ が $R \times X$ から X への連続写像とする。$C(X)$ をX上の連続関数の全体、$M(X)$ をX上の有界 Baire 測度の全体とおく。このとき R 上の群代数 $L^1(R)$

に対し $f\in L^1(R)$ と $\varphi\in C(X)$, $\mu\in M(X)$ との convolution を次のように定義する。

$$\varphi\star f(x)=\int_R \varphi(T_t x)\,f(t)\,dt,$$

$$\mu\star f(E)=\int_R \mu(T_{-t}E)\,f(t)\,dt.$$

次に $J(\varphi)$ を $\varphi\star f=0$ となる $f\in L^1(R)$ の全体，同様に $J(\mu)$ を $\mu\star f=0$ となる $f\in L^1(R)$ の全体，とおくと $J(\phi)$, $J(\mu)$ はおのおの $L^1(R)$ の閉 ideal となる。そこで φ の spector, $Sp(\phi)$, を $J(\phi)$ の hull および μ の spector, $Sp(\mu)$, を $J(\mu)$ の hull と定義する。即ち；

$$Sp(\phi)=\bigcap_{f\in J(\phi)}\hat{f}^{-1}(\{0\}),\quad Sp(\mu)=\bigcap_{f\in J(\mu)}\hat{f}^{-1}(\{0\}).$$

定義　$C(X)\ni\varphi$ が解析的とは $Sp(\phi)\subset[0,\infty)$ となること，同様に $M(X)\ni\mu$ が解析的とは $Sp(\mu)\subset[0,\infty)$ となることとする。

解析的連続関数の全体 $\mathfrak{A}$ は $C(X)$ における定数を含む閉 subalgebra となる。$\mathfrak{A}_0$ を $\varphi\in\mathfrak{A}$ で $Sp(\varphi)\subset(0,\infty)$ となるものの全体とすると $\mathfrak{A}_0$ は $\mathfrak{A}$ の ideal となる。$M(X)$ の元 μ が解析測度となる必要十分条件は $\mu\in\mathfrak{A}_0^{\perp}$，即ち $\mathfrak{A}_0\ni\varphi$ に対し $\int f\,d\mu=0$ となることが知られている（[1; Proposition 2]）。$R\ni t$ に対し $C[t,\infty)=\{\varphi\in C(X);\ Sp(\phi)\subset(t,\infty)\}$ とおく。$M(X)\ni\sigma\geq 0$ に対し M_t を $C(t,\infty)$ の $L^2(\sigma)$-closure とする。このとき $\mathfrak{D}(\sigma)=\bigwedge_{-\infty<t<\infty}M_t$ を $L^2(\sigma)$ に

おける distant future と呼ぶ．（[1],[6],[12] 参照）

§2. 問題の設定．

Forelli は [1] において解析測度の全変動は distant future $=(0)$ となることを示し，F. and M. Riesz の定理を flow による解析測度へ拡張した．そして [2] において，この定理の逆が成立するか否か？という次の問題を提出した．

問題（[2]）．$M(X)\ni\sigma\geq 0$ とし $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とする．このとき σ は解析測度の全変動となるか？

この問題に関し次のような結果が知られている．

結果1．（Forelli [2]）$M(X)\ni\sigma\geq 0$ とし $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とする．このとき $L^{\infty}(\sigma)\ni\varphi$ で $0<|\varphi|\leq 1$ a.e.$-\sigma$ に対して $\varphi d\sigma$ が解析的とできる．

結果2．（Helson [4]）X を compact 可換群でその双対群が archimedean order を持つとする．このとき自然に X に flow が定義される．いま $M(X)\ni\sigma\geq 0$ が Haar 測度に絶対連続で $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とすると σ は解析測度の全変動となる．

結果3．（田中 [10]）$M(X)\ni\sigma\geq 0$ で σ は ergodic な $\mathfrak{A}$ の表現測度に絶対連続とする．このとき $\mathcal{D}(\sigma)=(0)$ とすると σ は解析測度の全変動となる．

結果2は群上の不変部分空間の理論において重要な定理である，これより「全ての cocycle は analytic cocycle に

cohomologeous」という結果を得，不変部分空間の分類は analytic cocycle の構造を調べる問題へ転換される．また結果2，3は Segö の定理に強く依存していることを注意する（［3］参照）．

§3 Forelli の定理への考察．

測度を分類する煩わしさを避けるため，ここでは $\mathfrak{A}$ を Dirichlet 環（または logmodular 環）と仮定する（§5 参照）．

定理1．$M(X) \ni \sigma \geq 0$ とする．$L^1(\sigma) \ni w > 0$ および $L^\infty(\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ とする．このとき $\mathfrak{A}\varphi$ の $L^2(w d\sigma)$ - closure，$[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(wd\sigma)}$，は $g^{-1} \in L^\infty(\sigma)$ となる要素 g をふくむ．

系 $M(X) \ni \sigma \geq 0$ とする．$\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とするとある $g \in L^2(\sigma)$ に対し $g\,d\sigma$ が解析測度，および $g^{-1} \in L^\infty(\sigma)$ とできる．

定理1を証明するために次の補題が必要となる．証明は簡単なので省略する．

補題1．$C_R(X) \ni u > 0$ とする．このとき $\mathfrak{A} \ni f_n$ で $\| |f_n| - u \|_\infty \to 0 \ (n \to \infty)$ とできる．

補題2．$M(X) \ni \mu \geq 0$ とする．X における互いに交わらない可測集合列 $\{K_n\}$ が全ての n に対し；

$$\mu(K_n) > \tfrac{1}{2}\,\mu(X \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1}))$$

とするならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(K_n)=\mu(X) \quad \text{および} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu(K_n)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

となる．

<u>定理1の証明</u>　$d\mu=\varpi d\sigma$ とおく．仮定より μ と σ は互いに絶対連続となる．また

$$H_n=\{x\in X\ ;\ 1/n<|\varphi(x)|\leq 1\}$$

とすると $\mu(\bigcup_{n=2}^{\infty}H_n)=\mu(X)$ となる．帰納法を用いて，次の様な compact set の列 $\{K_n\}$，および $\mathfrak{A}$ における関数列 $\{f_n\}$ を作ることができる： 全ての N に対して，

1) $\left|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi\right|>1/2$ on $K_1\cup\cdots\cup K_N$,

2) $\mu(K_N)>1/2\,\mu(X\backslash(K_1\cup\cdots\cup K_{N-1}))$,

3) $\|f_N\varphi\|_2<\mu(K_N)^{1/2}+1/2^N$

実際，適当な n_1 に対して $\mu(H_{n_1})>1/2$ とできる．Lusin の定理より $H_{n_1}\supset K_1$ となる compact set を取って $\mu(K_1)>1/2$ かつ φ は K_1 上で連続とできる．補題1から $1/n_1<|\varphi|\leq 1$ となることより $f_1\in\mathfrak{A}$ で $|f_1\varphi|>1/2$ on K_1, $\|f_1\varphi\|_2<\mu(K_1)^{1/2}+1/2$ とできる．これによって K_1 および f_1 を定める．次に互いに交わらない compact set の列 $\{K_1\cdots\cdots K_N\}$ と $\mathfrak{A}$ の関数列 $\{f_1\cdots\cdots f_N\}$ が 1)～3) をみたし，φ が $K_1\cup\cdots\cup K_N$ 上で連続に取れたと仮定する．

$$E_{N+1}=\{x\in X\mid \left|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi\right|>1/2\}\backslash(\bigcup_{n=1}^{N}K_n)$$

とおく．また 十分大きい n_{N+1} に対して ；

$$\mu(H_{m_{N+1}}\setminus(K_1\cup\cdots\cup K_N))>\tfrac{1}{2}\,\mu(X\setminus(K_1\cup\cdots\cup K_N))$$

とできる．$H_{m_{N+1}}\cap E_{N+1}\supset F_{N+1}$ となる適当な compact set F_{N+1} および $H_{m_{N+1}}\setminus(E_{N+1}\cup K_1\cup\cdots\cup K_N)\supset F'_{N+1}$ となる適当な compact set F'_{N+1} を取って，φ は $F_{N+1}\cup F'_{N+1}$ の上で連続，$\mu(F_{N+1}\cup F'_{N+1})>\tfrac{1}{2}\mu(X\setminus(K_1\cup\cdots\cup K_N))$ とできる．これより

$$\min\{\,|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi|\ ;\ x\in F_{N+1}\cup K_1\cup\cdots\cup K_N\,\}=\alpha_N\ \ (>\tfrac{1}{2}),$$

$$\max\{\,|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi|\ ;\ x\in F'_{N+1}\,\}\ \ (\leq\tfrac{1}{2}).$$

となる．補題1を用いて，$\mathfrak{A}\ni f_{N+1}$ を次の様に定める．

$$|f_{N+1}\varphi|>1\qquad \text{on } F'_{N+1},$$

$$|f_{N+1}\varphi|<(\alpha_N-\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{3}\qquad \text{on } F_{N+1}\cup K_1\cup\cdots\cup K_N,$$

$$\|f_{N+1}\varphi\|_2<\mu(F'_{N+1})^{1/2}+2^{-(N+1)}.$$

ここで $K_{N+1}=F_{N+1}\cup F'_{N+1}$ とおくとよい．(2)，(3) をみたすことは明らか，また

$$\begin{aligned}|\sum_{n=1}^{N+1}f_n\varphi| &\geq |\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi|-|f_{N+1}\varphi|\\ &>\alpha_N-(\alpha_N-\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{3}\\ &=(2\alpha_N+\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{3}\\ &>\tfrac{1}{2}\qquad \text{on } K_1\cup\cdots\cup K_N\cup F_{N+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\sum_{n=1}^{N+1}f_n\varphi| &\geq |f_{N+1}\varphi|-|\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi|\\ &>1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\qquad \text{on } F'_N\end{aligned}$$

これより (1) をみたすことがわかる．いま $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi(x)$

とおくと (3) より $g(x)$ は収束して $[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(\mu)}$ に属す．また (1) と補題2 より $|g(x)| \geq \frac{1}{2}$ a.e. となることが簡単に確かめられる．(証明終り)．

系の証明．Forelli の定理 (結果1) より $L^\infty(\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ で $\varphi d\sigma$ が解析測度とできる．一方 $[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(\sigma)}$ の任意の g に対し $g d\sigma$ は解析測度となる．なぜなら適当な $\mathfrak{A}$ の関数列 $\{f_n\}$ に対し $f_n\varphi \to g$ in $L^2(\sigma)$ より任意の $h \in \mathfrak{A}_0$ に対して $\int h f_n \varphi d\sigma = 0$ から

$$\left|\int h g d\sigma\right| \leq \|h\|_\infty \int |f_n\varphi - g| d\sigma$$
$$\leq \|h\|_\infty \cdot \|f_n\varphi - g\|_2 \to 0$$

これより [1 ; Proposition 2] より $g d\sigma$ は解析測度となる．よって定理1 より明らかとなる (証明終り)．

(注意) 補題1 より $\mathfrak{A}$ の元で絶対値が $|g|^{-1}$ に L^2-norm でいくらでも近いものが取れる．これと quasi-invariant 測度の性質を考えあわせると Forelli の問題はほぼ肯定的であろうと推察される．

§4、定理1 の応用．

ここでは定理1と系を用いて正測度が解析測度の全変動となる十分条件を考える．いま系において σ が $\mathfrak{A}$ のある表現測度に絶対連続とすれば Szegö の定理より簡単に σ は解析測度の全変動となることがわかる．

<u>命題2</u>. $M(X) \ni \sigma > 0$ とする. 任意の $f \in \mathfrak{A}$ に対し, 適当な invariant 関数 $\varphi_f \in [\mathfrak{A}]_{L^2(\sigma)} \cap \overline{[\mathfrak{A}]}_{L^2(\sigma)}$ が存在し, $f + \varphi_f \perp \mathfrak{A}$ in $L^2(\sigma)$ とする. このとき $L^2(\sigma) \ni \varpi > 0$ に対して $\mathfrak{D}(\varpi d\sigma) = (0)$ とすれば $\varpi d\sigma$ は解析測度の全変動となる.

<u>証明</u> $L^\infty(\varpi d\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ となり $\varphi \varpi d\sigma$ が解析的とできる. 定理1より $[\mathfrak{A}\varphi]_{L^2(\sigma)} \ni g$ で適当な $\alpha > 0$ に対し $|g| > \alpha$ a.e とできる. $-\log|g| \leq -\log \alpha$ より $\mathfrak{A}$ が Dirichlet 環より $\mathfrak{A} \ni f_n$ に対して;

$$\mathrm{Re} f_n \leq -\log \alpha \quad , \quad \| \mathrm{Re} f_n - (-\log|g|) \|_2 \to 0$$

とできる. 一方 $f \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\begin{aligned} 2 \| \mathrm{Re} f \|_2^2 &= \| f + \bar{f} \|_2^2 \\ &= \| (f + \varphi_f) + (\bar{f} - \varphi_f) \|_2^2 \\ &\geq \| f + \varphi_f \|_2^2 \ , \ \| \bar{f} - \varphi_f \|_2^2 . \end{aligned}$$

これより $\{ \mathrm{Re} f_n \}$ は $L^2(\sigma)$ の Cauchy 列となることから $\{ f_n + \varphi_{f_n} \}$, $\{ f_n - \overline{\varphi_{f_n}} \}$ も $L^2(\sigma)$ の Cauchy 列となり, その和 $\{ f_n + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{f_n} \}$ もまた Cauchy 列となる. ここで部分列を取り各点収束させる. $\exp(f_n + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{f_n}) \cdot g \cdot \varpi d\sigma$ は解析測度となることが簡単に確められ,

$$|\exp(f_n + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{f_n}) \cdot g \cdot \varpi| \leq 1/\alpha \cdot g \cdot \varpi$$

および適当な $F \in L^\infty(\sigma)$ で $|F| = |g|^{-1}$ となる関数 F に

$$\lim \exp(f_n + i\,\mathrm{Im}\,\tilde{f}_n) = F \quad a.e-\sigma$$

これより Lebesgue の収束定理より 全ての $h \in \mathfrak{A}_0$ に対し $\int h\cdot F\cdot g\cdot \varpi\, d\sigma = 0$ となり [1; Proposition 2] より, $\varpi d\sigma$ を全変動とする 解析測度 $F\cdot g\cdot \varpi d\sigma$ を得る(証明終り).

(注意) この命題の仮定をみたす例は多い. 各 orbit に一点で交わる可測関数が取れるとき 多くの quasi-invariant 測度は それと同値な測度で 仮定をみたす正測度をもつ.

§5 一般の場合.

ここでは $\mathfrak{A}$ を Dirichlet 環と仮定してきた. しかしこの条件はいくつかの考察の下に不要となる. 一般に次のことが成立する([11] 参照).

(i) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ が(有限) invariant 測度に 絶対連続とすれば σ は解析測度の全変動となる.

(ii) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ が全ての(有限) invariant測度に 特異とすれば $L^2(\sigma) \ni g$ で $g^{-1} \in L^q(\sigma)$ となり $g d\sigma$ が解析測度となる.

(iii) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ は上の2つの タイプ の測度に一意に分解される.

文 献

[1] F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math., 118 (1967), 33—59.

[2] F. Forelli, What makes a positive measure the total variation measure of an analytic measure? J. London Math. Soc. (2), 2 (1970), 713—718.

[3] 荷見守助，不変部分空間の理論，岩波「数学」28巻1号 (1976)，47—57.

[4] H. Helson, Compact groups with ordered duals IV. Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 67—69.

[5] H. Helson, Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Academic Press, New York (1975), 1—62.

[6] 泉池敬司，Flow による generalized analytic functions よりなる環の分類，数理解析研究所講究録 (1976).

[7] P. Muhly, Function algebras and flows, Acta Sci. Math. (Szeged), 35 (1973) 111—121.

[8] P. Muhly, The distant future, Indiana Math. J. 24 (1974), 149—159.

[9] J. Tanaka, Some remarks on simply invariant subspaces on compact abelian groups (to appear in J. Math. Soc. Japan)

[10] J. Tanaka, A note on Helson's existence theorem, (to appear

in Proc. Amer. Math. Soc.)

[11] J. Tanaka, A certain class of total variation measures of analytic measures (in preparation).

[12] 富山淳，関数環とFlowについて，岩波「数学」28巻1号(1976)，35－46.

[13] 和田淳蔵，ノルム環，共立出版，(1969).

[14] 和田淳蔵，Function algebraとflow，数理解析研究所講究録，232 (1975)，90－96.

〈付記〉 この講究録を記すにあたり，伊藤雄二先生（立教大．理）に多くの御助言を頂いたことを付記致します.